现代概率论基础

1. 设 $X, \{X_n\}_{n\geq 1}$ 是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量, 满足 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$, 并且 X_n 依概率收敛到 X. 证明

(a) $\mathbb{E}[(X - X_n)^+] \to 0$;

(b) $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$.

2. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一列定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的独立同分布的随机变量, 且 $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$. N 是 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 的停时, 且 $\mathbb{E}[N] < +\infty$. 证明

$$\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$$

3. 称一个马氏过程为 Ornstein-Uhlenbeck 过程(简称O-U 过程), 若它具有转移概率密度函数

$$p(t,x,y) = (2\pi c(1-e^{-2\beta t}))^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y-e^{-\beta t}x)^2}{2c(1-e^{-2\beta t})}\right\}$$

其中 $c, \beta > 0$ 为常数.

(a) 验证 $X_t = e^{-\beta t}B_{e^{2\beta t}}$ 是一个 O-U 过程, 其中 $\{B_t, t\geq 0\}$ 是一个标准的布朗运动.

(b) 证明 O-U 过程有一个轨道连续的修正.

(c) 给出 O-U 过程的平稳分布.

(d) 判断 O-U 过程 $X_t = e^{-\beta t}B_{e^{2\beta t}}$ 能否以概率收敛到某随机变量, 并给出理由.

4. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个概率空间, $(\mathcal{F}_n)$ 是递增子 σ-域, $\sigma(\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$. ν 是 $\mathcal{F}$ 上另一个概率测度. 设 μ_n, ν_n 分别为 μ, ν 在 $\mathcal{F}_n$ 上的限制, $\nu_n = \nu_n^c + \nu_n^s$ 为 ν_n 关于 μ_n 在 $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ 上的 Lebesgue 分解. 令 $X_n = d\nu_n^c/d\mu_n$ 为 ν_n^c 关于 μ_n 的 Randon-Nikodym 导数.

(a) 证明 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一个非负的 $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mu)$ 上鞅.

(b) 证明存在可积随机变量 X_∞, 使得 $X_n \to X_\infty$, μ-a.s., 并且 $X_\infty = \frac{d\nu^c}{d\mu}$, 其中 ν^c 关于 μ 的 Lebesgue 分解的绝对连续部分.

(c) 若在 $\mathcal{F}$ 上 $\nu \ll \mu$, 则 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 为鞅, 且 $X_n = \mathbb{E}^{\mu}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$.

5. 设 (B_t) 是定义在某概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的标准布朗运动, τ 是一个有限停时.

(a) 令 $B_t^{(\tau)} = B(\tau + t) - B(\tau)$. 则 $B_t^{(\tau)}$ 是一个标准布朗运动, 且与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立.

(b) 令 $\tilde{B}(t) = 2B(t\wedge\tau) - B(t)$. 则 $\tilde{B}(t)$ 是一个标准布朗运动, 且 $(\tilde{B}, \tau)$ 与 (B, τ) 同分布.

(c) 令 $B_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$. 则对任意的 $z\geq 0, x\leq z$,

$$\mathbb{P}(B_t^* \geq z, B_t < x) = \mathbb{P}(B_t \geq 2z - x).$$

(d) 利用 (c) 证明 B_t^* 与 $|B_t|$ 同分布.

(e) 利用 (d) 证明

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq s\leq t}|B_s|^2\right) \leq 4\mathbb{E}[B_t^2].$$

6. 设 (B_t) 是定义在某概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的标准布朗运动. 用 Itô 公式分别写出

$$X_t = e^{-bt}x_0 + \int_0^t e^{-b(t-s)}dB_s$$

和

$$Y_t = \exp\{\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 B_t\}$$

满足的随机微分方程.